

目次

ふたたびの高校数学

はじめに i

- 高校数学の「全体」を俯瞰し、大学数学の「入口」を体感する i
- 本書の構成と「数学マップ」について iii

第1章 幾何学 ～説得術として発展した数学～

コラム1 「数学」の語源について 2

数学は昔も今も「学ぶべきこと」の代表格 3

01 命題と証明 (数I) 4

論理的思考の基礎～必要条件と十分条件～ 5

問題1 [名古屋学芸大学] 6

問題2 [同志社大学] 9

「対偶」は真偽を暴く 11

問題3 [東北福祉大学] 12

“不”や“無”を証明する「背理法」 14

問題4 16

「対偶」と「背理法」を混同しないために 17

コラム2 幾何学を学ぶ本当の理由～パスカルの説得術～ 20

人を説得する2つの方法 21

02 図形の性質 (数A) 22

中学数学のおさらい①～平行四辺形～ 22

中学数学のおさらい②～中点連結定理～ 23

三角形の「五心」その(1)～重心～ 26

三角形の「五心」その(2)～外心～ 28

三角形の「五心」その(3)～垂心～ 32

中学数学のおさらい③～円周角の定理～ 35

知っておくと便利な「トレミーの定理」 39

03 三角比 (数 I) 42

- 三角比の定義と相互関係 42
- 問題 5** [甲南大学] 45
- 「正弦定理」とその証明 48
- 「余弦定理」とその証明 51
- 正弦定理は角度の定理、余弦定理は辺の定理 52
- 問題 6** 53
- 「ヘロンの公式」を導く 55

第2章 代数学 ～方程式を解くための数学～

- コラム 3** 古代の「方程式」～代数学の本質は一般化～ 60
- 日常の中から真理をさぐった古代エジプト人 62

01 2次方程式 (数 I) 63

- ああ、なつかしの「2次方程式の解の公式」 64
- まずは簡単な2次方程式から 65
- 問題 7** 66
- 名付けて「平方完成の素」 67
- 平方完成から解の公式を導く 68
- 乗法公式と因数分解の公式 71
- 因数分解による2次方程式の解き方 74
- 問題 8** 75

02 複素数 (数 II) 78

- 人類が初めて虚数を手にした瞬間 78
- 虚数単位 i ～“愛”も“事情”で置き換わる～ 80
- i がもたらした「世界で最も美しい数式」 82
- “虚実”あい和す「複素数」～その定義と相等～ 83
- 問題 9** [昭和女子大学] 84

03 高次方程式 (数Ⅱ) 86

解法その(1)～因数分解の公式利用～ 86

問題 10 88

解法その(2)～置き換えの利用～ 91

解法その(3)～因数定理の利用～ 95

問題 11 101

コラム 4 解の公式をめぐるドラマ～3次方程式の解の公式の紹介～ 105

お人好しのフォンタナ、ちゃっかり者のカルダノ 105

第3章 解析幾何学 ～数と図形の統一～

コラム 5 デカルトの革命～幾何学と代数学の融合～ 110

変数と座標の導入 112

01 図形と方程式 (数Ⅱ) 114

三平方の定理で求める「2点間の距離」 114

直線の方程式(1)～通る1点と傾きがわかっている場合～ 116

直線の方程式(2)～通る2点がわかっている場合～ 118

傾きから考える「2直線の関係」 120

問題 12 122

「円の方程式」は2点間の距離を半径と見立てて求める 125

問題 13 [立命館大学] 126

02 不等式の表す領域 (数Ⅱ) 130

1次不等式の表す領域～その境界は直線～ 130

円を境界とする領域～内外を分ける不等号の向き～ 133

「線形計画法」～ビジネス数学の実例～ 136

問題 14 [九州大学] 136

領域を使って必要と十分を見極める 141

問題 15 [神戸薬科大学] 141

「または」と「かつ」について 143

コラム 6 オイラーが考案した絶対に正しい推論～論理と領域～ 144

問題 16 [国家Ⅰ種採用試験] 146

第4章 数論と数列 ～1, 2, 3…が一番難しい!?～

コラム7 美しくも気高い「数学の女王」…………… 150

01 整数の性質 (数 A) …………… 152

「素数」～千年の謎をまとう“大切な数”～ 152

素因数分解～素数に「1」が含まれない理由～ 153

問題17 [慶應義塾大学] 155

約数と公約数 157

倍数と公倍数 158

問題18 [近畿大学] 160

「ユークリッドの互除法」～人類最古のアルゴリズム～ 162

ユークリッドの互除法を用いて1次不定方程式を解く 168

問題19 [大阪市立大学] 168

補足 《割り算と最大公約数の定理》の証明 171

コラム8 友愛数と完全数とメルセンヌ数 174

02 数列 (数 B) …………… 178

数列～四角数および偶数を例に～ 178

等差数列と等比数列～それぞれの一般項を導く～ 179

問題20 [立命館大学] 181

等差数列の和～“図形”的に公式を導く～ 184

等比数列の和～“筆算”的に公式を導く～ 186

使いこなしたい Σ (シグマ) 記号 188

Σ の計算公式とその証明 190

まるで分配法則～とても便利な Σ の性質～ 193

問題21 [中央大学] 194

階差数列も Σ を使えばスッキリ 196

03 数学的帰納法 (数 B) …………… 200

ドミノ倒しで考える“無限” 201

問題22 [東京大学] 205

コラム9 「数学的帰納法」というネーミングについて 210

帰納と演繹～たとえば理科と数学～ 210
 そのネーミングの違和感をあえて解釈すれば 211

第5章 解析学 ～関数と微積分～

コラム 10 関数と自動販売機 214

01 2次関数 (数Ⅰ) 217

中学数学で習う「3種類」の関数 217
 関数と方程式～グラフの形はいっしょでも、とらえ方が異なる～ 222
 簡単な2次関数 $[y = ax^2]$ の平行移動を考える 224
 一般の2次関数 $[y = ax^2 + bx + c]$ のグラフを考える 227
 問題 23 [愛媛大学] 229

02 三角関数 (数Ⅱ) 234

三角比の利便性を格段に向上させる3つの新概念 235
 弧度法 (ラジアン) ～長さの比で角度を表す～ 236
 三角関数の定義と相互関係 240
 「一般角」の導入～実数全体に適用範囲を拡張～ 242
 有名な直角三角形と「特別な」角度 244
 三角関数の「特別な」値 246
 原理から考えて導く「負角・余角の公式」 251
 ここが急所！最難関の「加法定理」 252
 加法定理から導く「2倍角の公式」と「半角の公式」 258
 三角関数の合成 261
 問題 24 [京都大学] 263

コラム 11 三角関数なんて役に立つの？～フーリエ展開の恩恵～ 267

ナポレオンが愛した才能、ジョゼフ・フーリエ 269
 $y = A \sin k\theta$ のグラフ 270
 フーリエ展開とは 272
 フーリエ変換の応用例 275

03 指数関数 (数Ⅱ) 276

指数の範囲の拡張①～0 や負の整数の指数～ 278

累乗根の定義と性質 281

指数の範囲の拡張②～有理数の指数～ 286

問題 25 [鳥取大学] 288

指数の範囲の拡張③～無理数の指数～ 289

指数関数の定義と“お約束” 291

指数関数のグラフとその特徴 292

問題 26 [東京薬科大学] 297**04 対数関数 (数Ⅱ)** 300

対数の定義と性質 301

対数法則とその証明 303

底の変換公式 305

問題 27 [神奈川大学] [昭和薬科大学] 306

対数関数とそのグラフの特徴 308

逆関数について (数Ⅲ) 313

問題 28 [名古屋市立大学] 314**コラム 12 対数は感覚を司る!? ～ウェーバー・フェヒナーの法則～** 318

“ちょっとした変化”はどこまで識別可能? 318

ウェーバーの法則を発展させたフェヒナーの法則 319

対数が尺度に使われている例 321

05 微分・積分 “超” 概論 326

微分とは何か 326

平均変化率の極限：微分係数 329

導関数と増減表～微分の本質とは?～ 332

積分～微分よりずっと“兄貴分”～ 334

なぜニュートンとライプニッツは「微積分の父」なのか 339

逆演算とは 340

微積分の基本定理 341

公式のまとめ 348

コラム 13 ネイピア数 (自然対数の底) e 349

第6章 確率と統計 ～偶然を処理するための数学～

01 場合の数 (数 A) 356

ものの数え方、4つのケース 356

[ケース1] 順序を考えて、重複を許さない：順列 358

[ケース2] 順序を考えず、重複を許さない：組合せ 359

[ケース3] 順序を考えて、重複を許す：重複順列 363

[ケース4] 順序を考えず、重複を許す：重複組合せ 364

問題 29 [東京医科歯科大学] 368

02 確率 (数 A) 370

集合とその表し方 370

確率～確かさを表す数学的指標～ 371

問題 30 375

和事象と積事象～“カップ”と“キャップ”～ 377

余事象～全体を「1」としてその余りを考える～ 380

独立な試行～たとえばサイコロとコイン～ 382

反復試行～たとえばサイコロを n 回～ 384

条件付き確率～たとえば太郎も次郎も～ 387

原因の確率 (ベイズの定理) 389

問題 31 [岐阜薬科大学] 391

コラム 14 直感を裏切る確率 394

(1) 宝くじは初日に買っても最終日に買ってもいっしょ 394

(2) 誕生日のパラドックス 395

(3) 実力拮抗でも決着は早いかも？ 398

03 データの分析 (数 I) 402

代表値～“メジアン”と“モード”～ 403

データの分布と代表値 406

ばらつき具合を示す尺度その1～分散～ 408

ばらつき具合を示す尺度その2～標準偏差～ 411

問題 32 [筑波大学] 414

2変数の関係が目に見えてわかる「散布図」 416

相関関係の強弱を数値化する「相関係数」の求め方 419
 「-1~+1」の数直線で相関係数を解釈する 423
 相関係数の理論的背景について（範囲外） 423

コラム 15 相関関係についての注意点 431
 安易な結びつけは危険 432

第7章 大学への数学 ~線形代数と複素数平面~

コラム 16 ベクトルの使いみち~その2つの顔~ 436
 「矢印」を数学的に扱えるメリットとは 436
 物理学におけるベクトル 438
 多次元量としてのベクトル 442

01 ベクトル (数B) 444

ベクトルの相等~向きも長さもぴったり重なる~ 444
 逆ベクトルと零ベクトル 445
 ベクトルの加法~「和」の定義、2つの捉え方~ 446
 ベクトルの減法~「差」の定義、2つの捉え方~ 448
 ベクトルの実数倍と平行条件 451
 最重要ポイントは、ベクトルの分解 453
 問題 33 [早稲田大学] 455
 ベクトルの成分~始点を原点に重ねたときの座標~ 458
 成分によるベクトルの演算 459
 ベクトルの成分からその大きさ(長さ)を表す 462
 ベクトルの内積と、その図形的な意味 464
 ベクトルの垂直条件~内積0(影なし)をイメージで~ 468
 n 次元ベクトルの大きさ、内積、なす角の定義(範囲外) 469
 内積の性質とその証明 471
 問題 34 [東京理科大学] 473
 ベクトルの外積(範囲外ながら、ざっくり紹介) 476

コラム 17 ベクトルの「成分」と基底の取り換え 482
 基底の取り換えと斜交座標系 486

02 行列 (旧課程・数C) 488

- 行列の導入～その表記法から～ 488
- 行列とベクトルの積 491
- 行列の演算①～和と実数倍～ 493
- 行列の演算②～積とその非変換性について～ 495
- 行列の積の定義が複雑な理由 498
- 特殊な行列～零行列 O と単位行列 E ～ 500
- 逆行列の定義とその性質 502
- 鍵を握る「行列式」 $ad - bc$ 506
- 問題 35** [大分大学] 510
- 補足** 固有ベクトルと固有値 514
- 1 次変換 (線形変換) 516
- 線形性について 520
- 変換の和と行列の和 522
- 合成変換と行列の積 524

コラム 18 行列の使いみち～マルコフ連鎖とシェア分析～ 526

03 複素数平面 (数Ⅲ) 532

- 複素数平面～虚実が交わる座標平面～ 533
- 共役な複素数 534
- 複素数の絶対値 539
- 複素数の極形式 540
- 極形式における乗法 544
- 極形式における除法 545
- 回転を表す複素数 547
- 問題 36** [大阪大学] 548
- ド・モアブルの定理 552
- 1 の n 乗根 555

コラム 19 オイラーの公式を導く 557

おわりに 566

さくいん 569